11 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCICE 1 (05,75 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct.

I. Soit $z \in \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Posons $z = x + iy$, x et y réels.

1) Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est sa partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ? **(0,25 pt)**
2) Quel est le module de z ? **(0,25 pt)**
3) Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$.
Déterminer le cosinus et le sinus de α en fonction de z. **(0,5 pt)**
4) Soit M(z) un point du plan complexe et M'(z') l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ.
Exprimer z' en fonction de z et θ. **(0,5 pt)**

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit.
(E) : $\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0.$

1) Résoudre l'équation (E). **(0,5 pt)**
2) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.
Calculer OA, OB et AB. **(0,75 pt)**
En déduire la nature du triangle OAB. **(0,5 pt)**

3) On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. **(0,25 pt)**
Déterminer l'affixe du point D.

4) On appelle G le barycentre des points pondérés (O, 1) ; (D, -1) et (B, -1).
   a) Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$. **(0,5 pt)**
   b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique : 1 cm) **(01 pt)**

5) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$. **(0,5 pt)**
En déduire la nature du triangle GAC. **(0,25 pt)**

EXERCICE 2 (05,75 points)

I. On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements. Dans le cas d'équiprobabilité rappeler les probabilités des évènements suivants :
A, A sachant B, $A \cap \overline{B}$ et $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$. **(02 pts)**

II. Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.
Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.
  On désigne par D_n l'évènement : « La ville est délestée le $n^{ième}$ jour » et p_n la probabilité de l'évènement D_n, $p_n = p(D_n)$.

1) Montrer les égalités suivantes :
   $p(D_1) = 1$; $p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$; $p(D_{n+1}/\overline{D}_n) = \frac{5}{6}$ **(0,75 pt)**

2) Exprimer p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p(D_{n+1} \cap \overline{D}_n)$. **(0,5 pt)**
3) En déduire que, quel que soit $n \in IN^*$, on a :
   $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$ **(0,25 pt)**
4) On pose $U_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour $n \in IN^*$.
   a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme. **(0,75 pt)**
   b) Exprimer U_n puis p_n en fonction de n. **(01 pt)**
   c) Un match de football doit se jouer le 20ème jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage. **(0,5 pt)**

PROBLEME **(08,5 points)**

I. Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$.
  1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(0,5 pt)**
  2) Déterminer la dérivée de f, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f. **(01, 5 pt)**
  3) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule $\alpha \in IR$. **(01 pt)**
     En déduire que $3 < \alpha < 4$.

II. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x|+1}$.
  1) a) Montrer que g est définie sur IR^*. **(0,5 pt)**
     b) Démontrer que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser. **(0,25 pt)**
     c) Etudier la parité de g. **(0,25 pt)**
     d) On note $D_E =]0, +\infty[$.
        Soit k la restriction de g à D_E.
     Calculer les limites de k aux bornes de D_E. Etudier les branches infinies. **(01 pt)**

  2) a) En utilisant les questions I) et II 1) b.
        Calculer $k'(x)$ et étudier les variations de k sur D_E. **(0,5 pt)**
        Dresser le tableau de variations de k sur D_E. **(0,5 pt)**
     b) Déterminer le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et préciser le signe de k. **(0,5 pt)**

  3) a) Montrer que k réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
     c) Construire les courbes $(\mathscr{C}_k)$ et $(\mathscr{C}_{k^{-1}})$, $\mathscr{C}_{k^{-1}}$ est la courbe représentative de la bijection réciproque k^{-1} de k dans un repère orthonormé ; unité graphique : 1 cm **(01 pt)**
        Tracer la courbe de g dans le repère précédent. **(0,5 pt)**

CORRIGE

EXERCICE N°1

I. 1°) Z est écrit sous forme algébrique, x est sa partie réelle et y sa partie imaginaire (ou iy). Nota bene : deux réponses correctes au moins pour avoir 0,25 pt

2) Son module est $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) $\cos \alpha = \frac{Re(Z)}{|Z|}$ $\sin \alpha = \frac{Im(Z)}{|Z|}$.

4) Soit O(0), $Z' - Z_0 = e^{i\theta}\left(Z - Z_0\right)$

$$\boxed{Z' = Ze^{i\theta}}$$

II.

(E) : $\frac{1}{2} z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$

1) $\Delta' = (2\sqrt{3})^2 - 16 = -4$.
$\Delta' = (2i)^2$.
$Z_1 = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{\frac{1}{2}}$ et $Z_2 = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{\frac{1}{2}}$.

On obtient : $\boxed{Z_1 = -4\sqrt{3} - 4i}$ et $\boxed{Z_2 = -4\sqrt{3} + 4i}$.

2) $a = -4\sqrt{3} - 4i$, $b = -4\sqrt{3} + 4i$.
On a : $OA = |a| = 8$, $OB = |b| = 8$ et $AB = |8i| = 8$. Donc OAB est un triangle équilatéral.

3) $Z_D = Z_C\, e^{i\frac{\pi}{3}} = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3} + i)$.

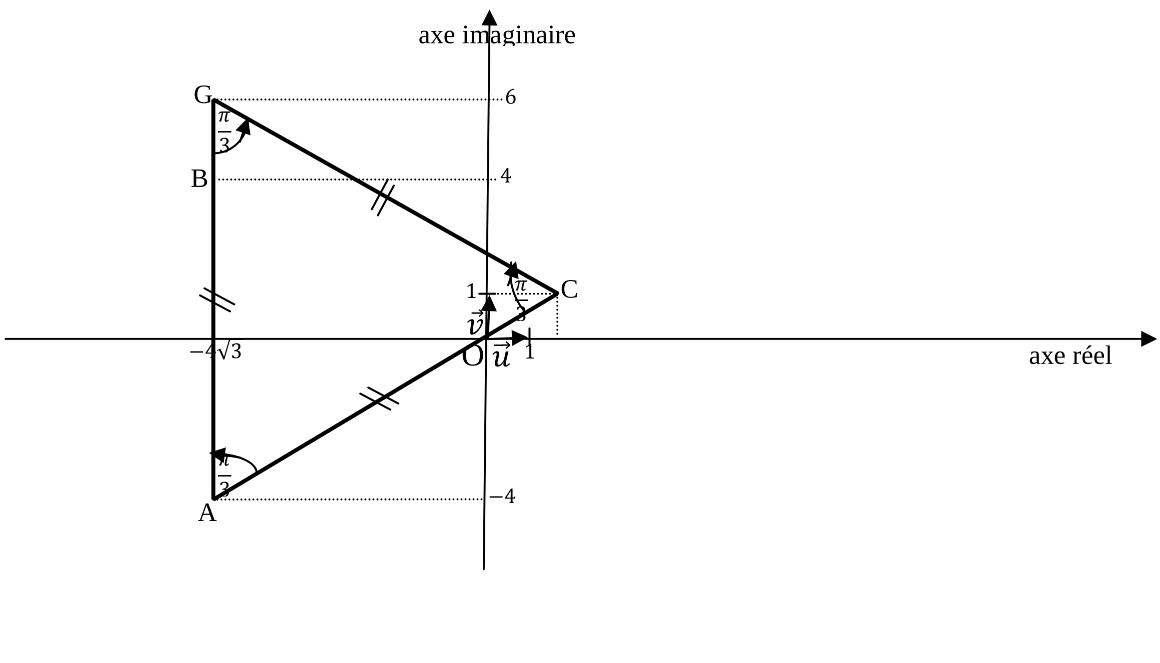
$$Z_D = \frac{1}{2}\, i\,(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i).$$

$$\boxed{Z_D = 2i}$$

4) G = barycentre du système {(O, 1), (D, -1), (B, -1)}.

a) $g = \frac{1.z_O - 1z_D - z_B}{-1} = Z_D + Z_B$.
$\boxed{g = -4\sqrt{3} + 6i}$.

b) Plaçons les points A, B, C et G dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



5) On vérifie que :

$\frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\begin{cases} |c-g| = |a-g| \\ \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$;

D'où $\begin{cases} GA = GC \\ (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$

Donc GAC est un triangle équilatéral direct.

EXERCICE N°2

I) $p(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$ $p\ (A\ /\ B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card\ B}$

$p(A) = p\left(A \cap \overline{B}\right) + p(A \cap B)$, car $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et $A \cap \overline{B}$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles.

II) 1) $p(D_1) = 1$

$p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$ $p(D_{n+1}/\overline{D_n}) = \frac{5}{6}$.

2) $p(D_{n+1}) = p_{n+1}$

$p(D_{n+1}) = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \overline{D_n})$ or $p(D_{n+1}) = p_{n+1}$

Donc $p_{n+1} = p(D_n)p(D_{n+1}/D_n) + p(\overline{D}_n)p(D_{n+1}/\overline{D}_n)$.

D'où $p_{n+1} = \frac{2}{9}p_n + (1-p_n)\frac{5}{6}$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{-11}{18}\ p_n + \frac{5}{6}}$$

3) $U_n = 6\,p_n - \frac{90}{29}$ $n \in IN^*$

a) $U_n = 6\,p_n - \frac{90}{29} = 6(p_n - \frac{15}{29})$

Donc $U_{n+1} = 6(p_{n+1} - \frac{15}{29})$

En remplaçant p_{n+1} par son expression on a:

$U_{n+1} = 6(\frac{-11}{18}\ p_n + \frac{5}{6} - \frac{15}{29})$

$U_{n+1} = 6(\frac{-11}{18}\ p_n + \frac{55}{6 \times 29})$

$U_{n+1} = 6 \times \frac{-11}{18}(\ p_n - \frac{55}{11} \times \frac{18}{6 \times 29})$.

$$U_{n+1} = \frac{-11}{18}(6\,p_n - \frac{90}{29})$$

Donc $\boxed{q = \frac{-11}{18}}$

b) $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ $U_1 = 6\,p_1 - \frac{90}{29}$ $U_1 = 6 - \frac{90}{29}$

$\boxed{U_1 = \frac{84}{29}}$

D'où

$$\boxed{U_n = \frac{84}{29} \times (\frac{-11}{18})^{n-1} \quad , n \in N^*}$$

$$P_n = \frac{1}{6}\,(U_n + \frac{90}{29})$$

$$\boxed{P_n = \frac{1}{6}\left[\frac{84}{29} \times (\frac{-11}{18})^{n-1} + \frac{90}{29}\right]}$$

c) Soit q_{20} la probabilité que la ville soit sans délestage le 20eme jour.
$q_{20} = 1 - p_{20}$ 0

$\boxed{q_{20} \cong 6{,}483}$ à 10^{-3}. Prés par défaut.

PROBLEME

I. $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$..

Soit D_f le domaine de définition de la fonction f,
$D_f = \mathbb{R}$ car $3x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $x \mapsto (x-1)^3$ est dérivable sur IR comme puissance d'une fonction dérivable sur IR.
D'où par produit $x \mapsto 3(x-1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto 3x^2 + 1$ dérivable sur IR et $3x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel ; par quotient $x \mapsto f(x)$ dérivable sur IR.
Calculons f'(x)

$$f'(x) = 3\frac{3(x-1)^2\left(3x^2+1\right) - (x-1)^3(6x)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 3\,(x-1)^2\left[\frac{3\left(3x^2+1\right) - (x-1)6x}{(3x^2+1)^2}\right].$$

$$f'(x) = 3\,(x-1)^2\left[\frac{9x^2+3-6x^2+6x}{(3x^2+1)^2}\right].$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{9(x-1)^2\,(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	+	
f	$-\infty$	↗	-6	↗	0	↗	$+\infty$

3) f continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection continue de IR sur $f(IR) = IR$ et $1 \in f(IR)$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation f(x) = 1 admet une solution unique $\alpha \in IR$
Montrons $3 < \alpha < 4$.
La restriction de f à [3 ; 4] est une bijection continue et $f(3) < 1 < f(4)$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution $\alpha \in]3,4[$.

II $g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x|+1}$.

1) a) g(x) existe si et seulement $\begin{cases} x \neq 0 \\ 3ln^2|x| + 1 \neq 0 \end{cases}$

or $3ln^2|x| + 1 \neq 0$ pour tout réel $x \neq 0$.

D'où $\boxed{Dg = \mathbb{R}^*}$

b)

$$g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3[(\ln|x|)^2+1]}.$$

$g(x) = f(ln|x|)$ en posant $h(x) = ln|x|$

On a $\boxed{g(x) = (foh)(x),\ x \neq 0}$

c) $Dg = \mathbb{R}^*$
Soit $x \in Dg$ donc $-x \in Dg$ (car $\mathbb{R}^*$ stable par passage à l'opposé)
$g(-x) = f(h(-x))$ or h paire $\Rightarrow$ $h(-x) = (x)$

d'où $\boxed{g(-x) = g(x),\ x \neq 0}$

II 1) c) Aussi g est paire sur Dg.

d) $D_E =]0, +\infty[$
$x > 0$ donc $h(x) = lnx$ or $k(x) = f(h(x))$
$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Par composée $\boxed{\lim_{x \to 0^+} k(x) = -\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Par composée $\boxed{\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty}$

<u>Etude des branches infinies</u> en $+\infty$

$K(x) = \frac{3(\ln x-1)^3}{3\ln^2 x+1}$.

$$\frac{k(x)}{x} = \frac{3(\ln^3 x - 3\ln x^2 + 3\ln x - 1)}{x(3\ln^2 x + 1)}$$

Pour $x > 0$ $\frac{k(x)}{x} = \frac{3\ln x}{x}\frac{[1-\frac{3}{\ln x}+\frac{3}{\ln x^2}-\frac{1}{\ln x^3}]}{[3+\frac{1}{\ln^2 x}]}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 0$ donc ($\mathscr{C}_k$) admet en k une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

2) a) on a $k(x) = (f\ o\ h)\ (x)$
En utilisant la forme de la dérivation d'une forme composée on obtient :
k'(x) = h'(x) x f'(h(x)) ;
k'(x) = $\frac{1}{x}$ f'(h(x)).
k'(x) garde un signe positif sur]0, + ∞[mais k'(x) s'annule en x vérifiant lnx-1 = 0 ou lnx+1 = 0
x = e ou x = $\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		-∞
k'(x)	||	+	0	+	0	+	
k	|| -∞	↗	-6	↗	0	↗	+∞

$k\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3(-1-1)^3}{3+1} = -6$

b) $k(x) = 0 \Leftrightarrow 3(ln\ x - 1)^3 = 0$

$lnx = 1$

x = e
($\mathcal{C}_k$) coupe l'axe des abscisses en A (e, 0)

Si x ∈]0, e[, k(x) < 0 Si x ∈]e,+∞[, k(x) > 0 Si x = e, k(x) = 0

3) a) k est continue et strictement croissante sur]0, +∞ [par composée de deux fonctions continue et strictement croissante.
D'où k réalise une bijection de]0, +∞ [sur IR.
D'où k(]0 ; +∞[) =IR
Donc $J = IR$.

Séries : S2-S2A-S4-S5

Epreuve du 1er groupe